

剪切变稀型 SPH 非牛顿流体的预测-校正方法

张雅斓, 班晓娟*, 王笑琨, 刘 幸

(北京科技大学计算机与通信工程学院 北京 100083)
(banxj@ustb.edu.cn)

摘要: 对非牛顿流体的模拟一直是基于物理的流体模拟技术的研究难点. 为解决 SPH 流体模拟中非牛顿流体粒子凝聚成团导致断层现象, 提出一种针对剪切变稀型非牛顿流体的预测-校正方法. 首先使用 Cross 模型对流体进行统一建模; 然后计算每个流体粒子受到的除了压力以外的其他力, 以此获得中间速度; 最后通过求解每个流体粒子的压强系数满足流体的不可压缩性, 实现密度校正. 为了提高计算速度, 该方法使用全局动态时间步长. 实验结果表明, 文中方法实现了牛顿流体和剪切变稀型非牛顿流体的统一建模, 解决了断层问题; 相比于无校正方法, 其能够在更大的时间步长下稳定运行.

关键词: 基于物理的动画; 流体仿真; 非牛顿流体; 光滑粒子流体动力学; 预测-校正法
中图分类号: TP391.41

A Predictive-Corrective SPH Method for Shear Thinning Non-Newtonian Fluid

Zhang Yalan, Ban Xiaojuan*, Wang Xiaokun, and Liu Xing

(School of Computer and Communication Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083)

Abstract: The simulation for non-Newtonian fluid has been an important research topic in physically based fluid animation. In this paper, we propose a novel predictive-corrective algorithm for non-Newtonian fluid based on incompressible smoothed particle hydrodynamics (ISPH). First, the viscous liquid is modeled by a non-Newtonian fluid flow and the variable viscosity under shear stress is achieved using a viscosity model known as Cross model. Then, a predictive-corrective method is proposed, by correcting density error with individual stiffness parameters for each particle, to avoid tensile instability and improve numerical stability. Finally, a global adaptive time-stepping method is adopted, which adjusts the time step automatically independent of the scenario and improve efficiency significantly. The results show that the proposed method can model the Newtonian fluid and the shear thinning non-Newtonian fluid, remove the tensile instability, and simulate in larger time step.

Key words: physically-based animation; fluid simulation; non-Newtonian fluid; SPH; predictive-corrective method

流体现象广泛存在于自然界、日常生活以及工业生产中. 对流体现象的模拟, 即流体动画, 在计算机图形学领域一直是研究热点; 其研究目标主要是如何更加逼真、高效、可控的生成动画. 当前,

基于物理的流体动画的研究主要集中于均匀介质、具有线性物理特性的不可压缩牛顿流体, 很少涉及非线性物理特性的非牛顿流体. 然而, 与此形成鲜明对比的是, 非牛顿流体广泛存在于化学工业、

收稿日期: 2016-05-11; 修回日期: 2016-12-13. 基金项目: 国家自然科学基金(61272357, 61300074, 61572075); 国家重点研发计划项目(2016YFB0700502, 2016YFB1001404). 张雅斓(1992—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学、流体模拟; 班晓娟(1970—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 论文通讯作者, 主要研究方向为人工智能、计算机图形学; 王笑琨(1987—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学、流体模拟; 刘 幸(1992—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机图形学、流体模拟.

石油工业、采矿工程、生物医学、食品加工等诸多领域, 例如, 充填矿坑的膏体、人体中的血液、融化的巧克力以及图 1 所示泥浆等. 因此, 对非牛顿流体的动画模拟既是对传统流体动画的补充与发展, 也是图形学及虚拟现实领域一个重要且具有挑战性的研究课题.

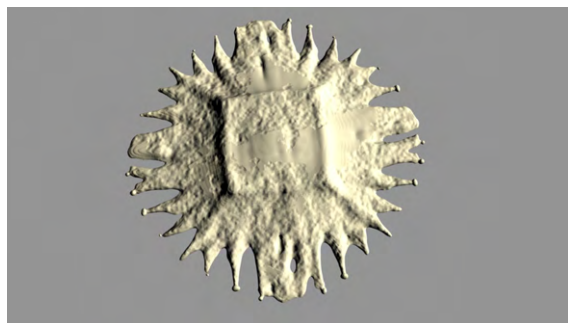


图 1 渲染后的非牛顿流体(泥浆)

由于非牛顿流体的物理本质非常复杂, 真实地模拟其运动现象非常困难. 非牛顿流体兼具固体和流体两方面特性^[1], 以剪切变稀型非牛顿流体为例, 当流体的流速较低时, 流体黏滞力较大, 非牛顿流体表现出固体特性; 当流体流速较高时, 流体黏滞力较低, 非牛顿流体表现出液体特性. 近年来, 光滑粒子流体动力学^[2](smoothed particle hydrodynamics, SPH)成为计算机动画领域一类重要的粒子方法^[3-5]. 然而, 用 SPH 方法对非牛顿流体仿真存在许多困难. 首先, 流体模型表现的优劣直接受控制模型的影响, 但传统的流体控制方法多针对理想的牛顿流体, 而非牛顿流体的黏性与流体的剪切率存在非线性的依赖关系, 需要对非牛顿流体重新建立适当的物理方程和稳定的近似模拟方法. 其次, SPH 方法具有无网格法所固有的一些数值问题^[6], 当非牛顿流体受力运动时, 会出现拉伸不稳定性现象, 其表现为粒子具有凝聚成团的趋势, 从而导致流体出现不合理的断裂现象. 此外, 由于非牛顿流体的物理方程的复杂性, 对其进行求解时需要设定很小的时间步长, 导致整个仿真过程非常耗时.

本文提出了一种面向剪切变稀型非牛顿流体的预测-校正方法. 首先通过使用 Cross 模型^[7], 在 SPH 框架上实现对牛顿流体和剪切变稀型非牛顿流体的统一建模; 然后使用预测-校正方法通过压强对流体密度进行校正, 解决断裂现象; 最后, 加入全局动态时间步长, 并根据场景调整时间步长, 提高仿真效率.

1 相关工作

研究者们提出了很多种方法对非牛顿流体进行模拟仿真, 现有的方法主要分为 2 类: 基于网格的欧拉方法和无网格的拉格朗日方法. 欧拉网格法将模拟域离散到网格点, 网格点的物理属性值(如速度、密度等)通过求解控制方程获得. 2004 年, Goktekin 等^[8]基于冯米斯屈服准则, 使用显式欧拉方法模拟了蜡块融化的过程, 引入一种拟线性塑性模型来控制固体逐渐变为非牛顿流体过程中的黏度变化. Losasso 等^[9]通过扩展粒子水平集的方法, 对不同黏塑性、不同密度的流体进行了统一建模; 其在同一网格区域内, 可能存在不同水平集, 通过在黏度计算前加入压强校正来完成不同水平集的交互. Batty 等^[10]发现, 非牛顿流体的拉普拉斯项和应变率项需要在无散度的速度场下进行计算, 因此他们在黏度计算后加入压强校正, 并提出了一种基于标记网格的隐式、无条件稳定的仿真方法. 尽管他们提出了一种高精度的自由表面边界条件, 但无法仿真高黏度的牛顿流体. Bergou 等^[11]提出了一种基于离散微分几何的方法, 用于模拟一维线性黏性流体. 该方法能够较好地模拟一维现象, 如扭转弯曲等; 但当流体的流层变厚时, 该方法会出现失真的情况. Batty 等^[12]提出用降维技术来模拟黏性薄层, 其将非线性表面张力和基于最小离散表面区域的公式相结合, 通过局部网格重构技术保留单元三角网格的质量; 该方法能够较好地实现黏性薄层的物理特性, 如下垂、褶皱等.

由于无网格法在处理自由表面与复杂界面方面具有较大优势, 以 SPH 方法为代表的无网格法在非牛顿流体仿真领域的应用越来越广泛. Müller 等^[13]构建了一种基于点的动画建模方法来仿真具有高弹性和高塑性的流体, 其将连续介质力学和 von Mises 塑性屈服条件相结合, 并利用移动最小二乘方法计算速度和位移. Paiva 等^[14]使用广义牛顿流体模型进行建模, 通过跳跃数控制流体的黏度. Paiva 等^[15]同样使用广义牛顿流体模型进行建模, 实现了高黏度的非牛顿流体受热融化为低黏度流体的过程, 所仿真的流体特性取决于场景中设置的温度. Rafiee 等^[16]提出了一种用于自由表面的 SPH 方法, 其可用于仿真牛顿流体和黏塑性流体, 能够实现模拟黏性流体的弯曲现象. Fan 等^[17]利用真实的聚合物状态方程描述非牛顿流体的压强

与黏性之间的关系, 以此仿真高黏高压的聚合物流动. de Souza Andrade 等^[18]使用 Cross 模型实现了黏性牛顿流体和剪切变稀型非牛顿流体的统一建模, 但是该方法只能仿真低黏度的流体, 而且当时间步长较大时, 会出现不稳定现象.

除了欧拉方法和拉格朗日方法外, 近年来出现了一种余维数法^[19]实现非牛顿流体. 该方法能够实现不同维度的非牛顿流体的交互, 如一滩油漆被毛刷刷过后留下丝状的痕迹, 这是欧拉法和拉格朗日法难以实现的.

近年来, 在传统的牛顿流体仿真中, 预测-校正方法已逐渐取代了标准 SPH 方法. 预测-校正方法最早由 Solenthaler 等^[20]应用到 SPH 方法中, 其核心思想是预测出无压强时的流体状态, 然后通过压强对其进行校正. 2014 年, Ihmsen 等^[21]提出了一种隐式 SPH 方法, 它通过下一时刻密度和速度的关系利用压强对密度进行调整. Bender 等^[22]提出了一种无散度速度法, 其本质上也是一种预测-校正法, 通过压强对密度进行 2 次调整, 使流体实现不可压缩性和速度的无散度. 由于针对 SPH 方法下的非牛顿流体的相关研究起步较晚, 非牛顿流体的研究还主要集中在如何建模, 而如何高效地对非牛顿流体进行建模这一问题还没有开始被研究者们所讨论. 目前, 预测-校正方法已经被广泛地应用到牛顿流体中, 但还没有针对非牛顿流体的预测-校正方法.

2 非牛顿流体建模

2.1 控制方程

非牛顿流体属于连续介质, 其运动控制方程须遵循质量守恒原则和能量守恒原则. 在拉格朗日框架中, 由于每个流体粒子的质量是固定的, 流体系统总质量保持守恒, 质量守恒原则无条件满足. 相对于牛顿流体^[23], 非牛顿流体具有弹性和塑性, 需要在控制方程中加入应变张量项. 其运动方程可以被表示为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{-1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g} \quad (1)$$

其中, t 为时间, \mathbf{v} 为速度场, ρ 为密度, p 为压强, \mathbf{g} 为重力加速度, $\boldsymbol{\tau}$ 为黏性应力张量项.

式(1)的拉格朗日形式为流体粒子随流体流动时的加速度, $\frac{-1}{\rho} \nabla p$ 项为由压强产生的流体加速度,

$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ 为不同速度的流体粒子间的摩擦力产生的黏性加速度. 黏性加速度是仿真非牛顿流体的关键.

2.2 Cross 模型

目前, 对于非牛顿流体的建模有许多种模型, 比较常见的是广义牛顿流体模型^[24]. 该模型比较适用于牛顿流体和非牛顿流体的转换, 尤其是高黏度非牛顿流体受热融化为低黏度流体的过程^[15]. 然而, 该模型不能较好地表现非牛顿流体的物理特性, 如弯曲、褶皱、旋转等.

本文使用 Cross 模型^[7]对牛顿流体和剪切变稀型非牛顿流体进行统一建模, 该模型既能实现非牛顿流体弯曲褶皱等物理特性, 也能对低黏度牛顿流体进行仿真, 是一种牛顿流体和非牛顿流体的统一模型. 在该模型中, 非牛顿流体的黏性应力张量项 $\boldsymbol{\tau}$ 与应变率张量 $\mathbf{D} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T$ 的非线性函数关系为 $\boldsymbol{\tau} = \rho \nu(D) \mathbf{D}$; 其中

$$D = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \text{tr}(\mathbf{D})^2} \quad (2)$$

Cross 模型能够较好地体现剪切变稀型非牛顿流体的物理特性, 即随着局部剪切率 D 的增大, 流体黏度降低, 因此动态黏度 ν 关于 D 的函数关系为

$$\nu(D) = \nu_{\infty} + \frac{\nu_0 - \nu_{\infty}}{1 + (KD)^n} \quad (3)$$

其中, K 和 n 为控制流体黏度的参数, 对于不同非牛顿流体的取值不同, 它通常为正数, 并在仿真开始前根据被仿真的非牛顿流体性质人为设定; ν_0 和 ν_{∞} 分别为流体在低剪切率和高剪切率时的黏度上限和黏度下限, 黏度的单位为 m^2/s .

当 $K=0$ 时, 式(3)所表示的非牛顿流体被简化为动态黏度为固定值 ν_0 的牛顿流体.

2.3 光滑粒子流体动力学

无网格粒子法的基本思想是将连续流体离散为粒子系统, 每个粒子具有质量、速度、压力等物理属性. SPH 方法本质上是一种权函数插值法, 任意宏观变量 $A(\mathbf{x})$ 在粒子 \mathbf{x} 处的值可以表示为关于其邻域 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_j$ 内所有粒子的加权平均形式, 即

$$\langle A(\mathbf{x}) \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} A_j W_{ij} \quad (4)$$

其中, $W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$, m_j 为邻居粒子的质量; ρ_j 为邻居粒子的密度; W 为核函数; h 为核函数

支持半径.

在 SPH 中, 空间导数计算公式为

$$\nabla A(x) \approx \langle \nabla A(x) \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} A_j \nabla W_{ij} \quad (5)$$

将密度 ρ_i 代入式(4), 得到密度的求解公式

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij} \quad (6)$$

对于压强的求解有许多公式, 在标准 SPH 框架中, 通常将不可压缩流体近似为弱可压缩流体. 换句话说, 压强通常由密度的状态方程求解得出. 为了简便起见, 本文采用 Morris 等^[25]提出的状态方程对压强进行求解, 即

$$p_i = k(\rho_i - \rho_0) \quad (7)$$

其中, k 为强度系数, ρ_0 为相对密度. 在实验中, $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$.

为了计算压强对流体产生的加速度, 本文将

$\frac{-1}{\rho} \nabla p$ 代入式(5), 对称化后得到

$$\frac{-1}{\rho_i} \nabla p_i = -\sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{\rho_j} \nabla W_{ij} \quad (8)$$

为了计算控制方程中的黏性加速度, 本文采用 SPH 求和公式^[25]对流体粒子 i 的形变率张量 $D_i = \nabla v_i + (\nabla v_i)^T$ 进行求解, 其中

$$\nabla v_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (v_i - v_j) \otimes \nabla W_{ij} \quad (9)$$

在更新了所有粒子的黏性应力张量项后, 得到流体的黏性加速度求和公式

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau_i = \sum_j m_j \left(\frac{\tau_i}{\rho_i^2} + \frac{\tau_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij} \quad (10)$$

3 预测-校正方法

在本文非牛顿流体模型中, 由于 SPH 方法存在无网格法所固有的数值问题, 当非牛顿流体受力运动时, 粒子具有凝聚成团的趋势, 从而导致非牛顿流体出现不合理的断裂现象. 为了解决这一问题, 本文提出一种预测-校正方法, 通过压强对密度进行校正.

目前, 已经存在几种方法^[20]通过求解压强来最小化牛顿流体流体的密度差 $\rho - \rho_0$, 但截止到投稿前, 尚未检测到针对非牛顿流体的校正方法. 为了简化计算, Solenthaler 等^[20]在牛顿流体预测-校正的推导中使用了近似与省略, 以此提升方

法的运行效率. 相比于牛顿流体, 非牛顿流体的控制方程中增加了应变张量项, 该项的计算与黏度、速度、密度相关, 因此, 非牛顿流体的仿真受速度的精度影响更大^[26], 牛顿流体的预测-校正法不可以直接应用于非牛顿流体.

本文采用的方法思想与牛顿流体的预测-校正法^[20]相似, 不同的是, 本文为每个流体粒子 i 设定一个独立的强度系数 k_i , 使该流体粒子满足局部的不可压缩性, 进而使整个流体系统的密度保持不变.

首先, 本文使用 SPH 求和方程^[21]来求解压强的梯度

$$\nabla p_i = k_i \nabla \rho_i = k_i \sum_j m_j \nabla W_{ij} \quad (11)$$

设在流体粒子 i 上由压强加速度产生的压强力为 F_i^p , 根据牛顿第二定律, 其计算公式为

$$F_i^p = -m_i \frac{1}{\rho} \nabla p = -k_i \frac{m_i}{\rho_i} \sum_j m_j \nabla W_{ij} \quad (12)$$

设 $F_{j \leftarrow i}^p$ 为流体粒子 i 作用在其邻居粒子 j 上的压强, 根据牛顿第三定律, 其数值与粒子 i 的所有邻居粒子作用在 i 上的压强值相等, 方向相反, 即满足 $F_i^p + \sum_j F_{j \leftarrow i}^p = 0$. 将其代入式(12), 得到

$$F_{j \leftarrow i}^p = k_i \frac{m_i}{\rho_i} m_j \nabla W_{ij} \quad (13)$$

本文采用半隐式欧拉方法对流体粒子的速度和位置进行更新, 其中, 速度的计算公式可以被改写为 $v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \Delta t \frac{F_i^{\text{adv}}(t) + F_i^p(t)}{m_i}$, $F_i^{\text{adv}}(t)$ 为除了压强力以外的其他力, 在本文中为黏滞力和重力. 根据预测理念, 设定一个中间(预测)速度值 v_i^* , 即

$$v_i^* = v_i(t) + \Delta t \frac{F_i^{\text{adv}}(t)}{m_i} = v_i(t) + \Delta t \cdot g + \Delta t \cdot \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau_i \quad (14)$$

设由压强校正产生的速度变化为 Δv_i , 即中间速度 v_i^* 经过压强校正后变为 $v_i(t + \Delta t)$, 校正量为 Δv_i . 得到

$$\Delta v_i = v_i(t + \Delta t) - v_i^* = \Delta t \frac{F_i^p(t)}{m_i} = -\Delta t \frac{k_i}{\rho_i} \sum_j m_j \nabla W_{ij} \quad (15)$$

同理可得

$$\Delta \mathbf{v}_j = \Delta t \frac{\mathbf{F}_{j \leftarrow i}^p(t)}{m_i} = \Delta t \frac{k_i}{\rho_i} m_j \nabla W_{ij} \quad (16)$$

设定中间速度 $\mathbf{v}_i^{* [21]}$ 所对应的流体密度 ρ_i^* 为

$$\rho_i^* = \rho_i(t) + \Delta t \sum_j m_j (\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_j^*) \nabla W_{ij} \quad (17)$$

其中, $\rho_i(t)$ 为当前时刻流体密度. 本文默认其在上一步已满足流体不可压缩条件, 即 $\rho_i(t) = \rho_0$.

为了保证流体的不可压缩性, 需要使流体密度保持不变, 即 $\rho - \rho_0 = 0$. 压力力需要校正的密度偏差 $\Delta \rho_i$ 计算公式^[21]

$$\Delta \rho_i = \Delta t \sum_j m_j (\Delta \mathbf{v}_i - \Delta \mathbf{v}_j) \nabla W_{ij} \quad (18)$$

经过压强校正后, 流体密度应满足 $\rho_i^* + \Delta \rho_i = \rho_0$. 将其代入(18), 可得

$$\begin{aligned} \Delta \rho_i &= \Delta t \sum_j m_j (\Delta \mathbf{v}_i - \Delta \mathbf{v}_j) \nabla W_{ij} = \\ &= \Delta t \sum_j m_j \left(-\Delta t \frac{k_i}{\rho_i} \sum_j m_j \nabla W_{ij} - \Delta t \frac{k_j}{\rho_j} m_i \nabla W_{ij} \right) \nabla W_{ij} = \\ &= \frac{-k_i}{\rho_i} \Delta t^2 \left(\left| \sum_j m_j \nabla W_{ij} \right|^2 + \sum_j |m_j \nabla W_{ij}|^2 \right) = \\ &= \rho_0 - \rho_i^* \end{aligned}$$

求解得到流体粒子 i 的强度系数

$$k_i = \frac{\rho_0 - \rho_i^*}{\Delta t^2} \alpha_i \quad (19)$$

其中, $\alpha_i = \frac{\rho_i}{\left| \sum_j m_j \nabla W_{ij} \right|^2 + \sum_j |m_j \nabla W_{ij}|^2}$.

本文算法步骤如下:

Step1. 遍历所有流体粒子. 对每个流体粒子 i , 查找邻居粒子 N_i , 设定时间步长 Δt .

Step2. 根据式(6)计算每个流体粒子 i 的密度 ρ_i , 根据式(18)计算每个流体粒子 i 的系数 α_i .

Step3. 根据式(9)计算每个流体粒子 i 的 $\nabla \mathbf{v}_i$, 根据式(10)计算每个流体粒子 i 的 τ_i .

Step4. 根据式(14)计算每个流体粒子 i 的中间速度 \mathbf{v}_i^* .

Step5. 迭代求解. 当流体平均密度和标准密度之间的偏差大于 η 或迭代次数小于 2 次时, 根据式(17)计算每个流体粒子 i 的中间密度 ρ_i^* , 根据式(19)计算每个流体粒子 i 的强度系数 k_i , $\rho_i^* = \rho_i^* + \frac{k_i}{\alpha_i} \Delta t^2$.

Step6. 计算每个流体粒子 i 在 $t + \Delta t$ 时刻的速度 $\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i^* - \Delta t \sum_j m_j \left(\frac{k_i}{\rho_i} + \frac{k_j}{\rho_j} \right) \nabla W_{ij}$ 和位置 $\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \Delta t \cdot \mathbf{v}_i(t + \Delta t)$.

本文方法首先使用紧致哈希方法^[27]查找流体

粒子的邻居粒子 N_i ; 然后计算每个流体粒子的密度 ρ_i 和系数 α_i . 由于系数 α_i 仅仅和粒子的质量、位置相关, 因此它可以在校正步骤前进行计算, 以降低方法的整体计算量. Step3 计算非牛顿流体的应变张量项, 该步骤体现了非牛顿流体和牛顿流体的区别.

Step4~Step5 为预测-校正步骤, 预测-校正方法的核心思想是通过求解压强来最小化流体的密度差, 即求解 $\rho - \rho_0 = f(p)$. 首先计算由非压力力产生的中间速度, 在本文中非压力力为应变张量和重力; 然后计算出中间密度 ρ_i^* 和强度系数 k_i . 其中, 强度系数 k_i 是求解 $\rho - \rho_0 = f(p)$ 并校正密度的关键. 最后对密度进行校正, 直到密度误差小于设定的阈值(本文为 0.1%), 循环结束.

Step6 对所有粒子的速度和位置进行更新.

4 全局动态时间步长

为使本文方法在加入了预测-校正步骤后仍然有较高的运行效率, 文中加入了动态时间步长^[28]. 实验表明, 相比于牛顿流体, 非牛顿流体粒子间存在更高的黏滞力, 粒子之间互相影响也较大, 因此为每个粒子设定独立的时间步长并不适用于非牛顿流体. 与传统动态时间步长^[28]不同, 本文采用全局动态时间步长, 即所有粒子使用同一时间步长, 时间步长随着场景的不同而动态改变.

SPH 数值模拟的时间步长的上界由 CFL (Courant-Friedrich-Levy) 条件给出, 该条件保证数值传播的速度大于物理传播的速度, 从而使数值计算稳定并收敛, 即

$$\Delta t_{\text{CFL}} \leq \lambda_v \left(\frac{h}{\mathbf{v}_{\max}} \right) \quad (20)$$

其中, $\mathbf{v}_{\max} = \max_i \|\mathbf{v}_i\|$ 是所有流体粒子速度的最大值, $\lambda_v < 1$ 为安全系数.

此外, 非牛顿流体的时间步长还受其黏性的限制^[18], 即

$$\Delta t_f \leq \lambda_f \left(\frac{h^2}{8\nu_0} \right) \quad (21)$$

其中, $\lambda_f < 1$.

最终的时间步长需要同时考虑以上 2 个条件, 即

$$\Delta t \leq \min(\Delta t_{\text{CFL}}, \Delta t_f) \quad (22)$$

5 实验结果

5.1 牛顿流体和非牛顿流体统一建模

本文通过实验验证方法的有效性, 所有的实现均使用 C++ 语言, 并使用 OpenMP 进行数据并行化. 流体的邻近粒子搜索使用宽度为 h 的均匀空间背景网格实现空间 Hash 法; 使用 NIST 的 JAMA 和 TNT 开源数学库实现表面构造中使用的奇异值分解(singular value decomposition); 使用开源物理引擎 Bullet 模拟刚体(如流体下方的容器); 使用 OpenGL(Open Graphics Library)进行流体粒子的实时显示仿真; 后期离线渲染使用 Blender 的光线跟踪引擎 Cycles. 实验使用的硬件平台为 Intel Xeon E5-2637 v2(15MB Cache, 3.50 GHz)、80 GB 内存, NVIDIA Quadro K4000 显卡.

图 2 所示为本文构建的模型下的粒子态的牛顿流体和非牛顿流体. 如第 2.2 节所述, 当 $K=0$ 时, 模型为图 2a 所示的黏度是固定值的牛顿流体, 当流体碰触到场景底部的容器时(为了方便观察流体粒子, 容器被设为完全透明), 与容器交互的流体粒子受到容器给的作用力而向上飞溅. 相比之下, 图 2b 中的非牛顿流体由于其黏滞力较大, 流体与容器发生碰撞时也不会产生粒子飞溅的现象. 图 3 所示为非牛顿流体的单溃坝实验的渲染结果图.

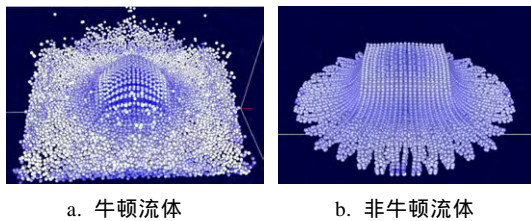


图 2 本文模型下的牛顿流体和非牛顿流体

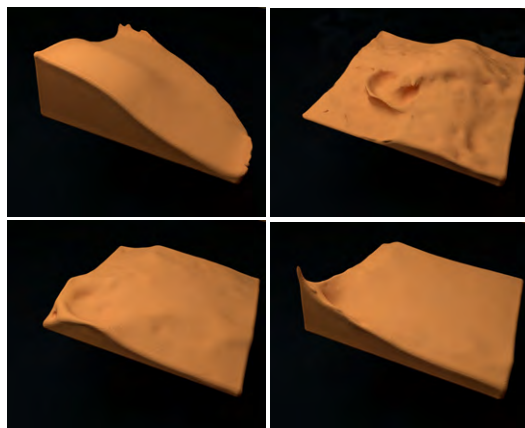


图 3 单溃坝实验

5.2 稳定性

为了证明本文方法有效性, 本文比较了非牛顿流体在校正前后的不同, 即流体粒子 i 的强度系数 k_i 为固定值和自适应优化 k_i 值的不同. 如第 4 节所述, 在无校正方法下, 时间步长受限于 CFL 条件和黏性的限制, k 的取值取决于设定的密度误差阈值 η [20], 当 $\eta=0.1\%$ 时, $k=6\times 10^6$. 相比之下, 本文方法为每个流体粒子 i 设定一个独立的强度系数 k_i , 经过校正后, 每个时间步长内密度误差均小于设定的阈值. 因此, 校正后的方法时间步长较大, 整体效率更高.

图 4 比较了非牛顿流体在校正方法前和预测-校正方法后的不同. 图 4 所示为一段自由下落的非牛顿流体水柱, 此处为渲染前的粒子状态图. 可以看出, 图 4a 中未校正的非牛顿流体水柱存在明显的断层现象, 随着流体粒子的自由下落, 密度偏差逐渐增大. 在经过预测-校正方法之后, 断层现象得到明显缓解, 如图 4b 所示. 校正后, 水柱底端的粒子层间距离要略大于顶端的粒子层间距离, 这是因为本文构建的为剪切变稀型非牛顿流体, 即流体的流速越快, 其黏性越低, 粒子间距离越大. 图 4 所示的实验中, 随着粒子的自由下落, 越靠下的粒子速度越快, 因而粒子层间的间隙增大.

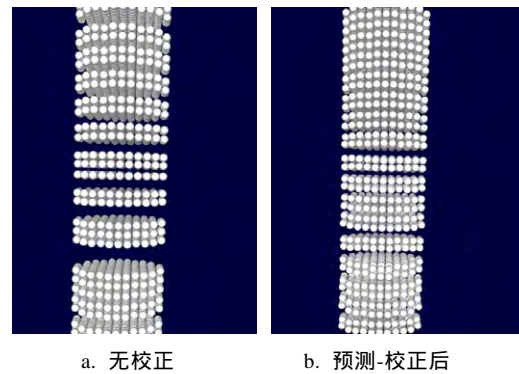
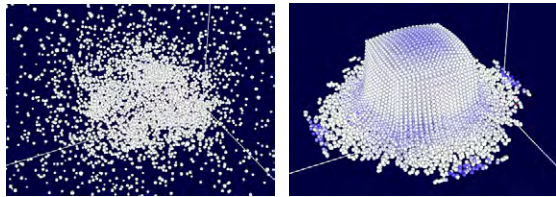


图 4 粒子态的非牛顿流体

在实验过程中, 本文发现, 当场景中流体粒子数较小或流体运动较为平缓时, 加入了预测-校正步骤的方法比无校正的方法运行时间更长, 这是因为预测-校正步骤的执行需要一定的存储资源和计算时间. 以图 4 中实验为例, 实验中为一段自由下落的非牛顿流体水柱, 粒子数为 13 671, $v_0 = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, $v_\infty = 0.2 \text{ m}^2/\text{s}$, $K=1, n=0.5$. 同样设定时间步长为 $2.5\times 10^{-6} \text{ s}$ 时, 无校正方法下计算机运行一个时间步长平均需要 53.3 ms, 校正后计算机运行一个

时间步长平均需要 83.4 ms. 然而, 当场景中流体粒子较多或粒子间有激烈碰撞时, 同等时间步长下, 无校正方法下的非牛顿流体将会出现不稳定现象, 如图 5a 所示, 无校正方法下, 时间步长设为 3.0×10^{-4} s 时, 无校正方法下, 粒子四处飞散. 只有当时间步长设定较小时, 仿真才能够进行下去. 相比之下, 加入了预测-校正步骤后的方法能够在较大时间步长下运行, 而且方法的稳定性较好, 如图 5b 所示.



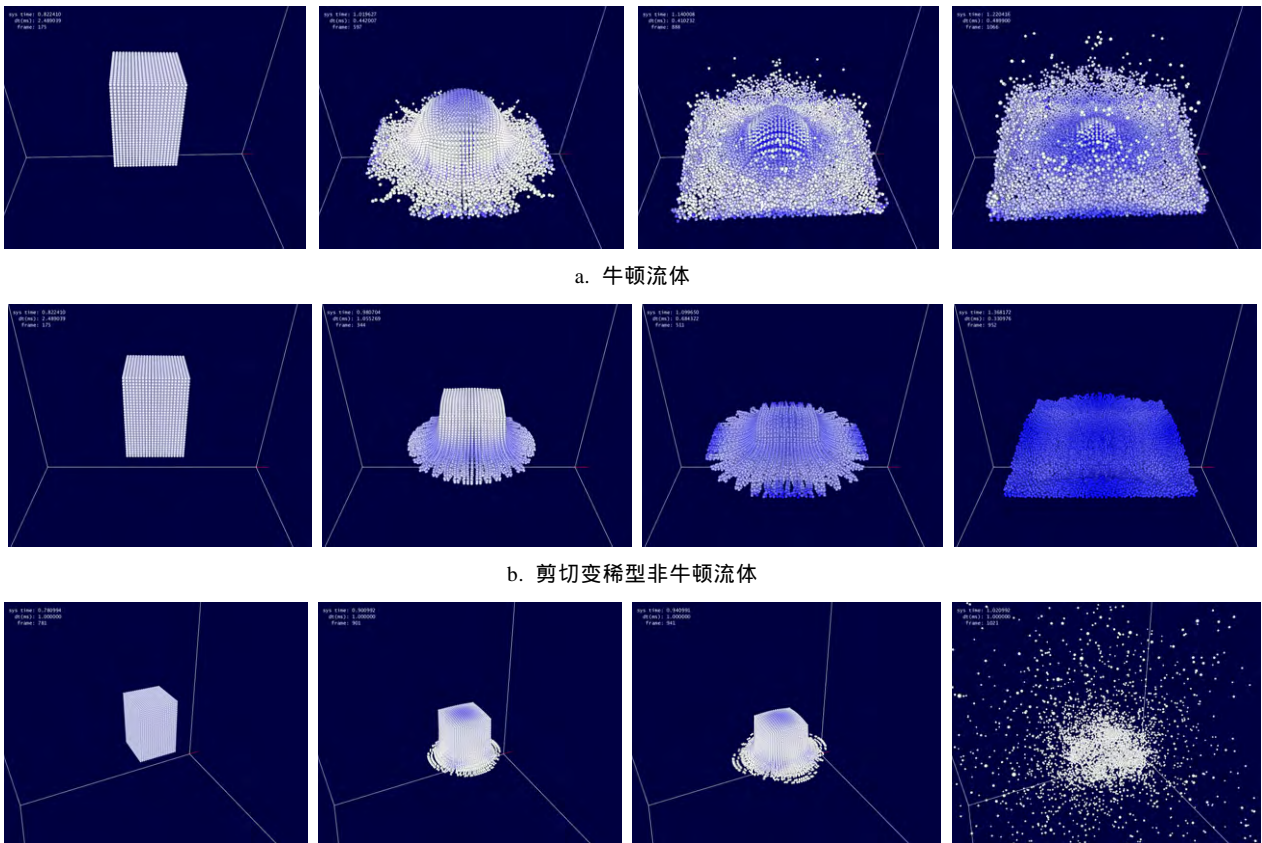
a. 无校正 b. 预测-校正后

图 5 对非牛顿流体的稳定性测试

本文模型下, 一段水柱的自由落体过程如图 6 所示; 在同一初始场景下, 本文方法可通过参数调节, 实现如图 6a 所示牛顿流体和如图 6b 所示剪切变稀型非牛顿流体. 当时间步长设为 0.3 ms 时, 经本文方法校正后的非牛顿流体仍可以正常运行, 如图 6b 所示, 没有校正的非牛顿流体则出现不稳定现象, 如图 6c 所示.

5.3 效率

为了使本文方法在加入了预测-校正步骤后仍然有较高的运行效率, 本文加入了动态时间步长, 即时间步长随场景而自动变化. 表 1 展示了图 4 所示实验加入动态时间步长前后的效率对比. 在实验场景中有 13 671 个流体粒子, $v_0 = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, $v_\infty = 0.2 \text{ m}^2/\text{s}$, $K = 1, n = 0.5$. 由表 1 可以看出, 同样进行 2 s 的仿真动画, 全局固定时间步长下仿真时间为 556s, 而动态时间步长下仿真时间为 254s.



a. 牛顿流体

b. 剪切变稀型非牛顿流体

c. 无校正下的剪切变稀型非牛顿流体

图 6 本文模型下一水柱的自由下落过程

表 1 加入动态时间步长前后对比

时间步长	真实动画时间/s	仿真时间/s
固定	2	556
全局动态	2	254

6 结 语

本文提出了一种基于预测-校正 SPH 方法的非牛顿流体模拟方法. 实验表明, 通过参数调节, 可以

实现不同的流体性质; 加入预测-校正步骤后的流体不再出现断裂现象, 同时在较大时间步长下, 依然可以保证稳定性; 通过使用全局动态时间步长, 仿真效率有了较大的提高。

目前, 本文的非牛顿流体模型中尚没有温度参数. 在加入温度参数后, 将可以实现非牛顿流体的相变转换, 如固态蜡块受热融化为蜡液等. 这可能成为我们接下来的研究点。

参考文献(References):

- [1] Ellero M, Tanner R I. SPH simulations of transient viscoelastic flows at low Reynolds number[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2005, 132(1-3): 61-72
- [2] Müller M, Charypar D, Gross M. Particle-based fluid simulation for interactive applications[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2003: 154-159
- [3] Xu Shibiao, Zhang Xiaopeng, Chen Yanyun, *et al.* Interactive simulation for water drop effects[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2013, 25(8): 1159-1168 (in Chinese)
(徐士彪, 张晓鹏, 陈彦云, 等. 交互式水滴效果模拟[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2013, 25(8): 1159-1168)
- [4] Shao Xuqiang, Zhou Zhong, Zhang Jinsong, *et al.* Stable solid boundary handling algorithm of weakly compressible SPH fluids[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2014, 26(11): 1915-1922+1929(in Chinese)
(邵绪强, 周忠, 张劲松, 等. 微可压缩 SPH 流体的稳定性固体边界处理算法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2014, 26(11): 1915-1922+1929)
- [5] Wang Xiaokun, Ban Xiaojuan, Liu Xu, *et al.* Effective reconstructing surfaces algorithm of anisotropic kernels orienting SPH fluids[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2016, 28(9): 1497-1505(in Chinese)
(王笑琨, 班晓娟, 刘旭, 等. 面向 SPH 流体的高效各向异性表面重构算法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2016, 28(9): 1497-1505)
- [6] Monaghan J J. Simulating free surface flows with SPH[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 110(2): 399-406
- [7] Cross M M. Rheology of non-newtonian fluids: a new flow equation for pseudoplastic systems[J]. *Journal of Colloid Science*, 1965, 20(5): 417-437
- [8] Goktekin T G, Bargeil A W, O'Brien J F. A method for animating viscoelastic fluids[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2004, 23(3): 463-468
- [9] Losasso F, Shinar T, Selle A, *et al.* Multiple interacting liquids [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2006, 25(3): 812-819
- [10] Batty C, Bridson R. Accurate viscous free surfaces for buckling, coiling, and rotating liquids[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2008: 219-228
- [11] Bergou M, Audoly B, Vouga E, *et al.* Discrete viscous threads[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2010, 29(4): Article No.166
- [12] Batty C, Uribe A, Audoly B, *et al.* Discrete viscous sheets[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2012, 31(4): Article No.113
- [13] Müller M, Keiser R, Nealen A, *et al.* Point based animation of elastic, plastic and melting objects[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2004: 141-151
- [14] Paiva A, Petronetto F, Lewiner T, *et al.* Particle-based viscoplastic fluid/solid simulation[J]. *Computer-Aided Design*, 2009, 41(4): 306-314
- [15] Paiva A, Petronetto F, Lewiner T, *et al.* Particle-based non-Newtonian fluid animation for melting objects[C] //Proceedings of the 19th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Proceeding. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2006: 78-85
- [16] Rafiee A, Manzari M T, Hosseini M. An incompressible SPH method for simulation of unsteady viscoelastic free-surface flows[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, 42(10): 1210-1223
- [17] Fan X J, Tanner R I, Zheng R. Smoothed particle hydrodynamics simulation of non-Newtonian moulding flow[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2010, 165(5/6): 219-226
- [18] de Souza Andrade L F, Sandim M, Petronetto F, *et al.* SPH fluids for viscous jet buckling[C] //Proceedings of the 27th SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2014: 65-72
- [19] Zhu B, Lee M, Quigley E, *et al.* Codimensional non-Newtonian fluids[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2015, 34(4): Article No.115
- [20] Solenthaler B, Pajarola R. Predictive-corrective incompressible SPH[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2009, 28(3): Article No.40
- [21] Ihmsen M, Cornelis J, Solenthaler B, *et al.* Implicit Incompressible SPH[J]. *IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics*, 2014, 20(3): 426-435
- [22] Bender J, Koschier D. Divergence-free smoothed particle hydrodynamics[C] //Proceedings of the 14th ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2015: 147-155
- [23] Becker M, Teschner M. Weakly compressible SPH for free surface flows[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2007: 209-217
- [24] de Souza Mendes P R, Dutra E S S, Siffert J R R, *et al.* Gas displacement of viscoplastic liquids in capillary tubes[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, 145(1): 30-40
- [25] Morris J P, Fox P J, Zhu Y. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 136(1): 214-226
- [26] Takahashi T, Dobashi Y, Fujishiro I, *et al.* Implicit formulation for SPH-based viscous fluids[J]. *Computer Graphics Forum*, 2015, 34(2): 493-502
- [27] Ihmsen M, Akinci N, Becker M, *et al.* A parallel SPH implementation on multi-core CPUs[J]. *Computer Graphics Forum*, 2011, 30(1): 99-112
- [28] Ban X J, Wang X K, He L L, *et al.* Adaptively stepped SPH for fluid animation based on asynchronous time integration[M] //Neural Computing and Applications. Heidelberg: Springer, 2016: 1-10