

基于多组分非牛顿流体模型的血流特性模拟

杨思嘉^{1,2)}, 熊乐歌¹⁾, 王笑琨^{1,2)✉}, 马建国³⁾, 黄厚斌^{4,5)}, 朱志鸿⁴⁾

1) 北京科技大学智能科学与技术学院, 北京 100083 2) 北京科技大学顺德创新学院, 佛山 528300 3) 北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 北京 100191 4) 中国人民解放军总医院海南医院, 三亚 572013 5) 中国人民解放军总医院, 北京 100853

✉通信作者, E-mail: wangxiaokun@ustb.edu.cn

摘要 可视化人体内血液流动特性对精准诊断心血管疾病、解析病理机制及优化治疗方案至关重要。然而, 传统医疗手段难以直接观测血液流动状态, 且对血液成分耦合效应的量化评估不足。为此, 本文提出一种基于多组分非牛顿流体模型的血流特性模拟方法。首先, 基于 Walburn–Schneck 模型描述非牛顿流体表观黏度; 其次, 通过引入体积分数, 将 Walburn–Schneck 黏度模型拓展至多组分应用场景, 准确模拟了不同组分间的交互作用机制, 实现了多组分非牛顿流体延展和流动效果的准确模拟; 最后, 构建血管壁处固–液作用力模型, 采用改进的光滑粒子流体动力学方法对壁面剪应力和黏附力进行建模, 修正了壁面附近粒子截断对流固边界附近流体模拟的计算误差。实验结果表明, 本文方法可有效捕捉非牛顿流体剪切速率的依赖特性及多组分流体的混合扩散行为, 较传统模型能更真实地还原复杂血管结构中的血液流动状态。研究成果为数智化诊疗提供了新的技术路径, 有望辅助深化理解血流动力学异常相关的病理机制。

关键词 医学可视化; 计算机辅助诊断; 流体动力学; 心血管疾病; 血流特性模拟

分类号 R774.1; TP399

Simulation of blood flow characteristics based on a multicomponent non-Newtonian fluid model

YANG Sijia^{1,2)}, XIONG Yuege¹⁾, WANG Xiaokun^{1,2)✉}, MA Jianguo³⁾, HUANG Houbin^{4,5)}, ZHU Zhihong⁴⁾

1) School of Intelligence Science and Technology, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

2) Shunde Innovation School, University of Science and Technology Beijing, Foshan 528300, China

3) School of Instrumentation Science and Optoelectronic Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China

4) Hainan Hospital of Chinese PLA General Hospital, Sanya 572013, China

5) Chinese PLA General Hospital, Beijing 100853, China

✉Corresponding author, E-mail: wangxiaokun@ustb.edu.cn

ABSTRACT Visualizing characteristics of blood flow in the human body is essential for accurate diagnosis of cardiovascular diseases, analysis of pathological mechanisms, and optimization of personalized treatment. However, traditional medical methods, relying primarily on imaging observations and empirical analysis, face significant limitations in directly observing blood flow states and lack sufficient quantitative assessment of the coupled effects of blood components. Therefore, in this study, we propose a blood flow characteristics simulation method based on a multicomponent non-Newtonian fluid model, integrating rheological modeling, multiphase coupling, and fluid–solid interaction mechanisms to address these problems. The proposed method takes three pivotal advancements into consideration. First, the Walburn–Schneck model is employed to describe the shear-thinning behavior of non-Newtonian fluids, wherein

收稿日期: 2025–06–06

基金项目: 海南省重点研发计划资助项目 (ZDYF2024GXJS032); 广东省基础与应用基础研究基金自然科学基金青年提升资助项目 (2023A1515030177); 国家资助博士后研究人员计划资助项目 (GZC20250945); 中央高校基本科研业务专项资金青年教师国际交流成才计划项目 (QNXM20250018); 国家自然科学基金资助项目 (U22A2022)

the viscosity is characterized as a function of shear rate. Second, the Walburn–Schneck model is extended to multicomponent application scenarios by introducing volume fractions, enabling the modeling of interaction mechanisms between different components and their collective influence on bulk viscosity. This extension allows for accurate simulation of multicomponent non-Newtonian fluid dynamics, including the complex deformation and flow patterns that traditional single-component models struggle to capture. Third, a solid–liquid interaction force model at the blood vessel wall is constructed using an improved smoothed particle hydrodynamics framework. The model incorporates wall shear stress and adhesive forces, effectively mitigating computational inaccuracies near the fluid–solid boundary caused by particle truncation. As a result, the model achieves robust simulations in complex vascular geometries. To verify the effectiveness of the proposed method for blood flow simulation, a series of experiments were performed. The drop and deformation experiments of non-Newtonian fluids were first conducted. The results demonstrated that the Walburn–Schneck model can accurately capture the shear rate-dependent viscosity changes, outperforming the Carreau model in reproducing fluid extension and thinning effects. To further assess the model’s adaptability to high-viscosity fluids, experiments on the coiling and folding phenomena exhibited by non-Newtonian fluids with high-viscosity characteristics were also carried out. The extended Walburn–Schneck model effectively captured and maintained the complex crease effects generated by fluid curling and folding, thereby verifying the model’s accuracy and applicability in high-viscosity scenarios. Then, simulations of multicomponent non-Newtonian fluids with varying volume fractions of high-viscosity components were carried out, and the stability of the multicomponent non-Newtonian fluid model was verified through the three-phase dam break experiment. Finally, simulations across diverse vascular scenarios were conducted to verify the efficacy of the solid–liquid interaction force model and the multicomponent non-Newtonian fluid model in the blood flow scenario. The model effectively reproduced mixing–diffusion behaviors in complex vascular structures, including straight, bifurcated, and stenotic vessels. Stable fluid–solid coupling and no particle penetration were observed, highlighting the robustness and accuracy of the proposed method. The research results provide a new technical pathway for digital and intelligent medical diagnosis, holding promise to assist in deepening the understanding of pathological mechanisms related to hemodynamic abnormalities. By integrating the fluid viscosity of the multicomponent with non-Newtonian rheology, the method improves the accuracy of hemodynamic simulations. Future work will focus on integrating microscale cellular interactions and dynamic vascular elasticity to further bridge the gap between simulation and clinical reality.

KEY WORDS medical visualization; computer-aided diagnosis; fluid dynamics; cardiovascular diseases; blood flow characteristics simulation

在医学领域,可视化人体内血液的流动特性,能够更直观地理解心血管疾病的发生和发展机制,并为疾病的诊断和治疗提供科学依据。心血管疾病作为全球范围内致死率最高的疾病类型之一,其病理机制与血流动力学特性密切相关^[1]。动脉粥样硬化、血栓形成等疾病的发生和发展,常伴随血液剪切应力分布异常、血细胞功能紊乱以及血液成分病理性变化等现象^[2]。传统诊疗手段主要依赖影像学观测与经验性分析,难以直接反映血液复杂的流动状态,尤其是血流速度、表面张力及黏度等关键血流动力学参数。尽管有临床检测方法能够对血液样本进行宏观的流变特性测量,但大多无法实时、动态地观察血液在真实血管环境中的流动行为,难以满足深入探究心血管疾病发生发展机制以及精准治疗的需求,严重制约了病理机制的深度解析和治疗方案的个性化制定。

近年来,随着人工智能与医学学科的不断交叉融合^[3],计算机辅助诊疗技术在医学图像分割^[4]、疾病评估监测^[5–6]以及手术规划模拟^[7–8]中取得了

显著成果,其中针对血流特性模拟场景,基于物理的流体仿真技术通过物理建模和三维可视化,有效弥补了传统医疗手段的不足,已成为协助医生进行疾病诊断的关键工具,对于揭示复杂血流动力学机制及优化治疗方案具有重要意义。

1 基于物理的流体仿真相关工作

基于物理的流体仿真技术主要基于流体力学基本方程,通过数值方法或物理建模实现对流体流动的模拟。为了求解这些流体方程,流体模拟领域发展出了欧拉网格法和拉格朗日粒子法两种视角^[9–10],两者处理流体采用的离散化策略不同:前者固定空间坐标系,观察流经每个空间点的流体属性随时间的变化;后者则跟踪流体粒子的运动轨迹,关注每个粒子的属性随时间的变化。

欧拉网格法通过结构化或非结构化网格对血液进行离散化^[11],结合有限差分法(Finite difference method, FDM)、有限元法(Finite element method, FEM)和有限体积法(Finite volume method, FVM)

等手段求解流体动力学方程. FDM 通过规则网格划分计算域, 以差分近似替代微分方程中的微分项, 具有理论简洁、易于实现的优势, 适用于规则几何区域的血流模拟. 例如, 周庆华^[12]提出了一种曲面网格构建算法, 并利用 FDM 对血流动力学方程进行求解, 同步将计算的流体物理信息映射到网格上, 以此完成血流模拟过程. FEM 将计算域划分为互不相交的网格单元, 接着在各个单元中选取基函数对位置函数构造近似解, 最后用插值替代方程对离散后的方程进行求解, 能够实现不规则计算域的模拟仿真, 且边界条件可根据网格节点自适应调整. Kronborg 等^[13]将血液视为不可压缩牛顿流体, 利用 FEM 处理变形网格下的 Navier-Stokes 方程来构建速度和压力的模拟. FVM 与 FDM 的求解思路相类似, 将定义域分割为互不相交的控制体积, 通过积分形式的守恒方程求解流体参数, 在求解过程中能够保证质量、动量和能量守恒. 在脑血管内的复杂流动动力学研究中, Lampropoulos 等^[14]将血浆和红细胞表示为不同的相, 通过 FVM 进行数值模拟, 求解 Navier-Stokes 方程. 然而, 欧拉网格法对边界极为敏感^[15], 不适用于对模拟精度要求较高的场景. 这是由于血管边界形态复杂, 基于网格的方法在网格生成与调整时计算负担较重, 难以适应高精度血流模拟的需求.

与欧拉网格法相比, 拉格朗日粒子法采用一系列任意分布的粒子而不是预定义的网格, 对于模拟具有复杂流变性的液体及其动态自由表面具有一定的优势^[9], 其中光滑粒子流体动力学 (Smoothed particle hydrodynamics, SPH) 通过粒子积分近似流体力学方程, 以其在流固耦合^[16-17]、多相流交互^[18]等复杂场景中的几何边界高效处理、表面形态自然追踪等显著优势^[19], 在血流模拟研究中展现出巨大潜力. Müller 等^[20]将血流简化为牛顿流体, 首次在血流模拟领域中引入 SPH, 并简化了 Navier-Stokes 方程的求解过程, 大大减少了动力学方程的计算量. Qin 等^[21]将 SPH 方法与质点-弹簧系统模型相结合, 实现了对血流、血管壁以及二者之间交互作用的模拟. 李言等^[22]提出了一种改进的弱压缩 SPH 算法求解粒子压强, 基于单组分假设通过密度自适应光滑长度和表面张力修正, 实现了伤口及血管出血的真实模拟.

除了以上两种视角以外, 也有学者提出了网络-粒子混合的方法, 如格子玻尔兹曼法^[23]. Gagniere 等^[24]用网络-粒子混合的方法处理流体复杂的边界条件. 然而, 由于网格和粒子的同时存在, 导致

该方法计算成本很高, 目前主要集中应用于二维模拟中.

尽管上述方法在血流模拟中取得一定进展, 但现有模型多将血液简化为牛顿流体, 忽略了其非牛顿特性以及多组分间的交互作用, 导致模拟精度受限. 此外, 在狭窄血管和固液边界区域等复杂区域, 非牛顿流体特性的动态响应尚未得到充分刻画, 影响了病变部位血流状态评估的准确性. 针对以上问题, 本文提出一种基于多组分非牛顿流体模型的血流特性模拟方法, 旨在为临床治疗提供动态流场分析与参数优化支持. 首先基于 Walburn-Schneck 黏度模型建立血液非牛顿流变特性模型; 接着, 引入体积分数, 拓展该模型至多组分混合的场景; 最后, 结合光滑粒子流体动力学方法, 构建血管壁处固-液作用力模型, 实现对多组分血液流动及其与血管壁动态耦合过程的精准模拟.

2 面向复杂血管场景的血液流动特性模拟方法

血流作为一种典型的生物流体, 其高精度数值模拟对揭示心血管疾病病理机制、优化介入治疗方案具有重要科学意义与临床价值. 鉴于血液组分的高度复杂性及其微尺度特点, 体系具有更加明显的表面张力和非牛顿特性, 亟需构建多维度模型精确刻画其流体动力学. 本文以物理仿真技术为基础, 结合双机制表面张力模型^[25], 从血液流变特性与流固耦合机制两个关键层面展开深入研究, 通过构建多组分非牛顿流体黏度模型和血管壁处固-液作用力模型, 完善面向复杂血管场景的血液流动模拟理论与方法体系, 旨在为心血管疾病的数智化诊疗提供理论依据与技术支撑.

2.1 Walburn-Schneck 黏度模型

非牛顿流体的本构方程描述了流体黏性应力张量与应变率之间的关系, 黏性应力张量 τ 包含法向分量与切向分量, 在剪切流动条件下黏性应力张量也可被称作剪应力或剪切应力, 应变率也相应简化为剪切速率. 与牛顿流体不同, 非牛顿流体的核心特征是其表观黏度 μ 不再是常数, 而是随剪切速率 $\dot{\gamma}$ 变化而变化, 其可通过幂律模型进行描述, 如式 (1) 所示. 该模型通过幂律指数描述流体的流动行为, 能够表征假塑性和胀塑性流体, 是非牛顿流体本构方程的基本函数形式. 当 $n > 1$ 时, 流体表现为剪切变稠的胀塑性流体; 当 $n < 1$ 时, 流体表现为剪切变稀的假塑性流体; 当 $n = 1$ 时, 流体退化为牛顿流体. 鉴于幂律模型在描述非线性流变

特性、多组分混合效应等方面的优势, 本文在幂律模型的基础上, 选用 Walburn-Schneck 模型^[26] 对非牛顿流体建模.

$$\mu = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (1)$$

式中, n 为幂律指数, k 为度量黏度大小的一致性系数. 为简化计算过程, 对式 (1) 取自然对数, 得到式 (2):

$$\ln\mu = \ln k + (n-1)\ln\dot{\gamma} \quad (2)$$

利用最大 R^2 技术改进回归分析方法^[26], 对每个自变量分别计算相关 R^2 统计量以衡量回归模型对观测数据的拟合优度, 将 R^2 统计量最大的模型作为“最佳”单变量模型. 例如, 假设有自变量 X_1 、 X_2 、 X_3 , 分别构建以它们为自变量的回归模型, 计算各自模型的 R^2 统计量, 若 X_1 对应的模型 R^2 统计量最大, 那么以 X_1 为自变量的模型就是“最佳”单变量模型, 其形式如式 (3) 所示.

$$\ln\mu = S_1 + S_2 X_1 \quad (3)$$

为保证本构方程的实用性, 本文采用双变量模型描述非牛顿流体黏度, 如式 (4) 所示, 通过将剩余变量逐个添加到最佳的单变量模型之后再次计算 R^2 统计量, 在进行了所有可能的比较后, 分离出两个变量的组合. 若这两个变量比之前的两个变量模型产生了最大的 R^2 增长, 则该程序继续循环, 直到 R^2 没有进一步增加, 此时的结果为最佳的双变量模型. 确定本模型对应自变量为剪切速率和主成分浓度, 基于如式 (5) 所示的 k 和 n 形式, 确定双变量模型构建的非牛顿黏度模型如式 (6) 所示.

$$\ln\mu = S_1 + S_2 X_1 + S_3 X_2 \quad (4)$$

$$\begin{cases} k = S_1 e^{S_2} \\ n = 1.0 - S_3 \end{cases} \quad (5)$$

$$\mu = S_1 e^{S_2 (\dot{\gamma})^{-S_3}} \quad (6)$$

根据式 (7), 基于表观黏度 μ 计算非牛顿流体的黏性应力张量 τ , 在更新所有粒子的黏性应力后, 黏滞力产生的加速度可通过式 (9) 计算得到.

$$\tau = \rho\mu D \quad (7)$$

$$D = \nabla v + (\nabla v)^T \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho_i} \nabla \cdot \tau_i = \sum_{j \in N_i} \left(\frac{\tau_i}{\rho_i^2} + \frac{\tau_j}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla W_{ij} \quad (9)$$

其中, ρ 表示密度, D 表示粒子的形变张量, 其计算式如式 (8) 所示, v 表示速度; $\nabla W_{ij} = \nabla_i W(|x_i - x_j|, h)$ 为三次样条核函数, $|x_i - x_j|$ 表示粒子 i 和粒子 j 之间

的距离, h 代表光滑长度, N_i 是粒子 i 的邻域粒子集合.

2.2 多组分非牛顿流体模型

由于血液的成分通常由多种物质混合而成, 构成复杂且组分浓度的变化和相互作用会间接影响到流体混合物的总体黏度, 对最终的非牛顿流体流动形态产生影响. 因此, 进一步将 Walburn-Schneck 黏度模型拓展至多组分的应用场景. 为达成这一目标, 已有多种基于拉格朗日观点的多相流相互作用方法被提出, 这些方法主要用于模拟不同相之间的混合或分离效应. 本文将基于体积分数的相交换模型与非牛顿流体黏度模型进行集成, 通过在粒子内引入体积分数的概念, 使得混合形态下多组分的流体黏度计算更为简易, 实现多组分非牛顿流体黏度模拟.

在 Ren 等^[27] 所提出的混合模型方法基础上, 本文利用一组体积分数 α_k 来描述多相流中不同相或组分 k 的分布状况, 这些体积分数代表了各自对应的体积占比. 在每一个粒子内部, 各组分的体积分数均需遵循归一化原则. 若将体积分数代入连续性方程以及 Navier-Stokes 方程, 便能够得到针对粒子 i 中某一特定相 k 的质量守恒与动量守恒的描述, 具体方程如下:

$$\frac{\partial(\alpha_{ki}\rho_{ki})}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_{ki}\rho_{ki}v_{ki}) = 0 \quad (10)$$

$$\alpha_{ki}\rho_{ki} \frac{Dv_{ki}}{Dt} = -\alpha_{ki}\nabla p_{ki} + \alpha_{ki}\rho_{ki}g + \alpha_{ki}\nabla \cdot \tau_{ki} + M_{ki} \quad (11)$$

其中, $Dv_{ki}/Dt = \partial v_{ki}/\partial t + (v_{ki} \cdot \nabla)v_{ki}$ 为物质导数, α_k 为粒子内相 k 的体积分数, ρ_{ki} 表示粒子内相 k 的密度, v_{ki} 表示粒子内相 k 的速度, τ_{ki} 表示粒子内相 k 的黏性应力张量, p_{ki} 表示粒子内相 k 的压强分量, g 表示重力加速度, M_{ki} 代表界面动量源项. 以各组分的体积分数作为权重因子, 对不同相的密度加权平均, 计算粒子 i 的密度如下式所示:

$$\rho_i = \alpha_{ki}\rho_{ki} \quad (12)$$

式 (11) 中 M_{ki} , 其产生源于不同流体组分间的相互作用, 这种相互作用主要涵盖了湍流应力、扩散应力以及阻力 (即拖拽力) 等多种作用力的综合影响, 其与单相流情形存在差异. 拖拽力在动量源项中占主导^[28], 鉴于此, 本文直接采用 Jiang 等^[29] 所提出的阻力建模简化方法进行如下修正:

$$M_{ki} = \alpha_{ki}(\rho_{ki} - \rho_i) \left(g - \frac{Dv_i}{Dt} \right) \quad (13)$$

基于式 (11) 展开全相态求和运算, 根据局部

平衡假设^[29](即粒子在较短的空间尺度上建立局部平衡, 近似要求粒子可快速加速到每个步长下的终态速度), 各相处于相同压力下, 相 k 的压强分量 p_{k_i} 和黏性应力张量 τ_{k_i} 可以统一采用混合粒子体系内的共性参数 p_i 和 τ_i 进行替代, 由此推导出多组分混合粒子的动量守恒关系式如(14)所示:

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = - \sum_k \frac{\alpha_{k_i}}{\rho_{k_i}} (\nabla p_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i) + \mathbf{g} + \sum_k \frac{\mathbf{M}_{k_i}}{\rho_k} \quad (14)$$

根据单相及混合相情形下的 Navier-Stokes 方程, 可推导出漂移速度的计算式如下所示:

$$\mathbf{v}_{k_i}^d = C_m \frac{\rho_k - \rho_i}{\rho_i} \left(\mathbf{g} - \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} \right) + \frac{D_m}{\alpha_{k_i}} \nabla \alpha_{k_i} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{v}_{k_i}^d$ 表示漂移速度, 用于描述流体组分 k 和含有该组分的粒子之间的速度差异, C_m 和 D_m 是两个关联粒子内各组分体积分数的更新参数, C_m 主要用于表征体系中各组分分离的效果强度, 而 D_m 则用于反映组分间扩散的作用程度, C_m/D_m 比值大小意味着组分间相互作用效果的强弱. 式(15)等号右边第一项描述的是由于不同相之间存在相对运动以及惯性差异所引发的相分离现象, 第二项则体现了由于湍流波动和布朗运动所导致的相间扩散效应.

图1中清晰地展示了混合模型中体积分数 α_k 、相速度 $\mathbf{v}_k$ 、漂移速度 $\mathbf{v}_{k_i}^d$ 以及混合速度 $\mathbf{v}_i$ 的概念和关系^[27], 粒子内的三种不同组分分别由黄、绿、蓝三种颜色表示. 如图1(a)所示, 灰色箭头表示各相独自具备的相速度, 而红色箭头则表示依托以体积分数为权重, 对各相速度求和得出的混合速度, 即以粒子整体形式对外表现出的速度; 图1(b)中黑色箭头表示各相的漂移速度, 由粒子混合速度和相速度的矢量差来推导, 即 $\mathbf{v}_{k_i}^d = \mathbf{v}_{k_i} - \mathbf{v}_i$; 图1(c)表示各组分最终计算得到的漂移速度.

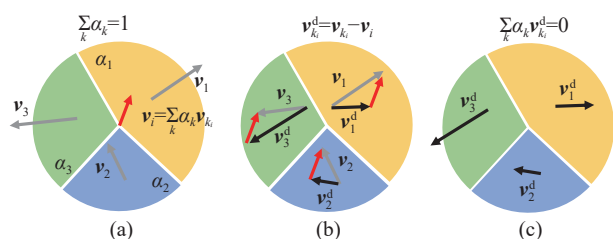


图1 混合模型示意图^[27]. (a) 体积分数、相速度和混合速度之间关系; (b) 相速度、混合速度和漂移速度之间关系; (c) 漂移速度

Fig.1 Diagram of mixture model^[27]. (a) relationships among volume fraction, phase velocity, and mixing velocity; (b) relationships among phase velocity, mixing velocity, and drift velocity; (c) drift velocity

在实际应用中, 当某一组分 k 体积分数 α_{k_i} 为

零, 意味着该组分不存在时, 扩散项会变得不起作用, 所以如果粒子中不包含 k 相, 此扩散项则不再起作用. 因此, 为了使数学模型与物理实际相符合并简化计算, 可以直接设置 $\mathbf{v}_{k_i}^d = 0$. 体积分数需要在每个时间步长 dt 内进行更新, 计算方式遵循如下式:

$$\alpha_{k_i} = \alpha_{k_i} - \nabla \cdot (\alpha_{k_i} \mathbf{v}_{k_i}^d) + \nabla^2 (D_m \alpha_{k_i}) \quad (16)$$

式(16)中的离散项 $\nabla \cdot (\alpha_{k_i} \mathbf{v}_{k_i}^d)$ 根据下式完成展开计算:

$$\nabla \cdot (\alpha_{k_i} \mathbf{v}_{k_i}^d) = - \sum_j V_j (\alpha_{k_i} \mathbf{v}_{k_i}^d + \alpha_{k_j} \mathbf{v}_{k_j}^d) \cdot \nabla W_{ij} \quad (17)$$

式(16)中的二次项 $\nabla^2 (D_m \alpha_{k_i})$ 根据二阶 SPH 离散化公式, 计算结果如下:

$$\nabla^2 (D_m \alpha_{k_i}) = D_m \sum_j V_j (\alpha_{k_i} - \alpha_{k_j}) \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}}{\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} + \epsilon} \quad (18)$$

其中 $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{x}_j$ 分别表示粒子 i 和粒子 j 的坐标, V_j 表示粒子的体积, 可根据模拟框架中设置的粒子半径计算得到, 同时设定源项 $\epsilon = 0.01h$, h 代表光滑长度.

多组分非牛顿流体黏度的计算, 可根据 Bingham 等^[30]在此前研究中给出的以下形式计算得到:

$$F(\mu) = \omega F(\kappa_1) + (1 - \omega) F(\kappa_2) \quad (19)$$

式中, ω 表示混合比例, κ_1 、 κ_2 表示两种组分流体单一存在时的黏度参数, F 是一个依赖于模型的可逆映射, 且该映射需要保持物质参数的维数不变, 但是这种机制存在明显的弊端. 首先, 式(19)的形式会使得模型局限于两种组分的场景; 其次, 当黏度参数 $\kappa_1 = \kappa_2$ 时, 无论 ω 和 F 如何选, 它们的预测结果均为 $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$, 无法计算这种情况下的混合黏度. 因此, 本文参考式(19)的形式, 以体积分数的概念构建黏性应力和应变率之间的映射关系如下:

$$\boldsymbol{\tau} = f(\dot{\gamma}) = \frac{\sum_i V_i \kappa_i \dot{\gamma}}{\sum_k V_k} = \dot{\gamma} \sum_i \alpha_i \kappa_i \quad (20)$$

式中, $\boldsymbol{\tau}$ 表示黏性应力张量, $\dot{\gamma}$ 表示应变率, α_i 表示在粒子 i 中各组分的体积分数, V_i 表示粒子的体积, V_k 表示某一组分 k 的体积. 由于同一位置处的所有粒子体积变化量(即形变梯度的行列式)均相同, 因此无论使用变形后的体积还是变形前的体积都不会对计算产生影响. 考虑到使用体积比更具实际意义, 因此对式(20)进行代换修正, 即:

$$\kappa = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \sum_i \alpha_i \kappa_i \quad (21)$$

由此,可计算出混合态下的粒子黏度参数,带入 Walburn-Schneck 黏度模型中,得到多组分环境下的粒子表观黏度如下:

$$\mu = S_1 e^{S_2 \kappa (\dot{\gamma})^{-S_3}} \quad (22)$$

2.3 血管壁处固-液作用力模型

当血液在血管中流动时,由于血液的黏性和血管壁的弹性作用,会在血管壁表面产生壁面摩擦和黏附的作用,本文将二者统称为壁面作用力.摩擦力是血流对血管壁表面产生的一种切向作用力,即壁面剪应力(Wall shear stress, WSS),这种剪应力受到血管内血流量、血液表观黏度以及血管内径等多方因素的影响;黏附力则更加广泛存在于流-固耦合之间,在血管等生物流体系统中,血液的流动与血管壁的相互作用是一个复杂的生理过程,其中黏附力起着关键作用.通过添加黏附力,可以更准确地模拟血液在血管壁上的附着行为,因此需要构建壁面作用力模型,对血管内的血液进行边界粒子检测.

在血流动力学中,在非牛顿流体环境下血管壁面剪应力 $\mathbf{F}^{\text{WSS}}$ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$) 可按照 Soulis 等^[31]提出的形式进行计算,如下:

$$\mathbf{F}^{\text{WSS}} = -\mu \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\text{wall}} \quad (23)$$

其中, μ 为动态表观黏度, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$; $\mathbf{v}_t$ 是相对于壁面的切向速度, $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\mathbf{n}$ 是垂直于壁面的单位向量.由于壁面剪应力是流体与壁面接触点上的瞬时剪应力,容易受到局部流动条件的影响,因此可以在非结构化网格内部通过对整个面积的剪应力进行加权,计算平均面积壁面剪应力,减少局部流动条件变化带来的误差.定义平均面积墙剪应力 $\mathbf{F}^{\text{ave-wss}}$ 为:

$$\mathbf{F}^{\text{ave-wss}} = \frac{1}{A_0} \sum_{i=1}^{\text{mesh}} |\mathbf{F}^{\text{WSS}}|_i a_i \quad (24)$$

其中, mesh 表示网格数, a_i 为每个网格的面积, A_0 表示网格总面积.

在将上述方法应用于 SPH 框架的过程中,如图 2 所示,由于核函数(图 2 中虚线阴影区域)在靠

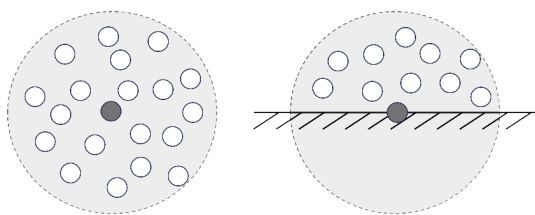


图 2 血管壁附近粒子的截断示意图

Fig.2 Diagram of particle truncation near the vascular wall

近壁面处被截断,导致靠近壁面的粒子(图 2 中实心圆)没有足够的相邻粒子(图 2 中空心圆)支撑计算.

为解决这一问题,本文对 $\mathbf{F}_i^{\text{WSS}}$ 的计算方法修正如下:

$$\langle \mathbf{F}_i^{\text{WSS}} \rangle_{i \in \text{wall}} = -\frac{\mu}{\rho_i} \sum_j \cdot m_j C_\xi (\mathbf{v}_{t,j} - \mathbf{v}_{t,i}) \frac{\partial H(r,h)}{\partial \mathbf{x}_n} \quad (25)$$

$$H(r,h) = \frac{0.007}{h^{3.25}} \begin{cases} \sqrt[4]{-\frac{4r^2}{h} + 6r - 2h}, & 2r > h \wedge r \leq h \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

$\mathbf{F}_i^{\text{WSS}}$ 代表壁面剪切力的 SPH 近似值, wall 表示边界层粒子集, i 和 j 分别表示当前粒子及其邻域粒子, m_j 为领域粒子质量, $\mathbf{x}_n$ 为垂直于壁面的局部坐标, $\mathbf{v}_t$ 是相对于壁面的切向局部速度, $H(r,h)$ 为所使用的核函数, r 表示粒子 i 和粒子 j 之间的距离, h 代表光滑长度, C_ξ 为校正因子,用于补偿核函数在靠近壁面处的截断效应,其计算基于核函数所覆盖的面积(或对应于三维模拟的体积)除以截断核中粒子所代表的连续体域的面积,不同核函数的校正因子存在差异.

在计算壁面剪应力后,同样在边界层粒子上施加黏附力 $\mathbf{F}^{\text{adhesion}}$,具体计算方式为:

$$\langle \mathbf{F}_{i \leftarrow p}^{\text{adhesion}} \rangle_{i \in \text{wall}} = -\beta m_i \Psi_{b_p} B(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p|) \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p|} \quad (27)$$

式中, β 为附着系数, p 为边界粒子, Ψ_{b_p} 表示边界粒子质量, B 是样条函数, $\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{x}_p$ 分别表示粒子位置.

为实现双向流-固耦合,此处使用边界粒子对固体表面进行采样,以解决 SPH 在固体边界附近的黏滞问题,并允许在不同滑移条件下进行双向流-固耦合.边界粒子的体积近似为 $V_{b_i} = \delta_{b_i}^{-1}$,其中 δ_{b_i} 是根据相邻边界粒子计算的边界粒子的数量密度.边界粒子对流体粒子的贡献基于边界粒子的体积得到,记为 $\Psi_{b_i}(\rho_0) = \rho_0 V_{b_i}$, Ψ_{b_i} 在计算流体密度、压力和黏附力时,用于代替边界粒子的质量.

3 实验

为验证所提出的血流特性模拟方法的有效性,首先基于 Walburn-Schneck 模型进行非牛顿流体特性模拟实验;接着,进一步验证 Walburn-Schneck 模型对高黏流体复杂卷曲与折叠现象的模拟能力;然后,开展多组分非牛顿流体模拟实验;最后,对多类型血管场景下的血液流动进行仿真,验证多组分非牛顿流体黏度模型和血管壁处固-液作用力模型在血液流动场景下的有效性和稳定性.

本文基于 Taichi 和 Python 编程语言实现了上述相关模型, 采用 Nvidia GeForce RTX 4060 GPU 实验设备进行计算, 流体的表面重构和渲染通过 Houdini 完成.

3.1 非牛顿流体流动特性模拟

进行非牛顿流体形变模拟实验, 通过令非牛顿流体跌落并观察流体形态, 验证本文黏度模型有效性. 图 3 展示了第 55、120、185、250 帧下非牛顿流体从固定高度掉落到地面产生冲击的过程.

当兔子形状的非牛顿流体与地面撞击时, 应变率增加, 流体黏度增大; 随后流体在静置过程中, 应变率减小, 黏度降低, 在地面逐渐向四周呈铺展状态. 实验中将 Carreau 模型与本文引入的 Walburn-Schneck 模型的结果进行对比, 当黏度参数设定为 $S_1 = 0.4, S_2 = 0.1, S_3 = 0.9$ 时, 可以观察到 Walburn-Schneck 模型变稀效果优于 Carreau 模型, 支持更大范围的非牛顿特性变化, 并具有更好的延展特性和流动性.

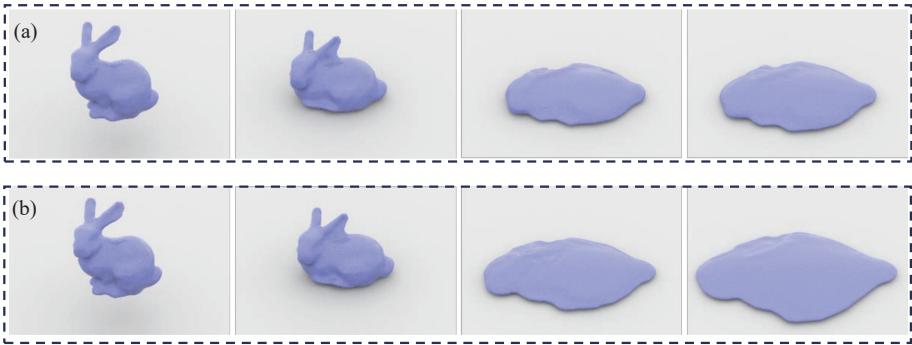


图 3 兔子流体掉落实验. (a) Carreau 模型; (b) 本文模型
Fig.3 Drop Experiment of bunny fluid: (a) Carreau model; (b) proposed model

为进一步验证本文模型的效果, 利用圆环形状的流体块完成跌落过程, 关注圆环与平面碰撞并产生挤压形变的过程, 并与 Carreau 模型进行对比. 设定黏度模型所使用的参数为 $S_1 = 0.5, S_2 = 0.1, S_3 = 1.4$. 图 4 为第 100、150 和 200 帧的实验结果,

可以观察到在初始状态相同的情况下, Walburn-Schneck 模型构建的圆环与地面碰撞后, 流体的黏度转变速度更快, 使流体在平面上扩散范围更大, 流体的非牛顿特性更为明显, 而 Carreau 模型无法通过黏度参数调节达到图 4(b) 的效果.

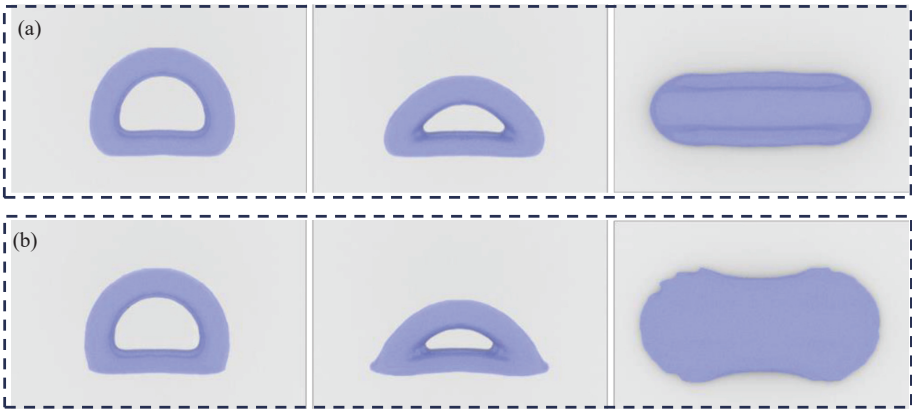


图 4 圆环流体挤压变形实验. (a) Carreau 模型; (b) 本文模型
Fig.4 Deformation experiment of annular fluid: (a) Carreau model; (b) proposed model

为充分验证流体的非牛顿特性, 将粒子的黏度值通过颜色进行可视化. 图 5 展示了本文模型在圆环流体实验时的粒子态渲染效果, 图中红色区域标志着粒子的黏度值出现了下降. 在受到地面挤压的作用下, 圆环流体被挤压部位的粒子经历了更高的剪应率, 因此, 这些区域呈现出红色,

直观地反映了非牛顿流体剪切变稀的现象.

3.2 高黏度特性的非牛顿流体模拟

为验证 Walburn-Schneck 模型对高黏流体的适应性, 对高黏度特性的非牛顿流体所展现的复杂卷曲与折叠现象进行实验, 如图 6 所示. 流体从上方管道口流出掉落至斜坡上, 在自然下滑的过

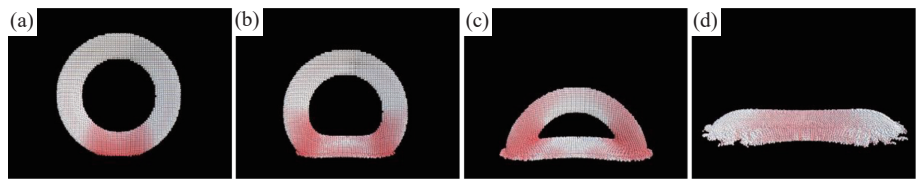


图5 圆环挤压变形实验的黏度可视化。(a)第50帧;(b)第100帧;(c)第150帧;(d)第200帧

Fig.5 Viscosity visualization of the annular fluid deformation experiment: (a) 50th frame; (b) 100th frame; (c) 150th frame; (d) 200th frame

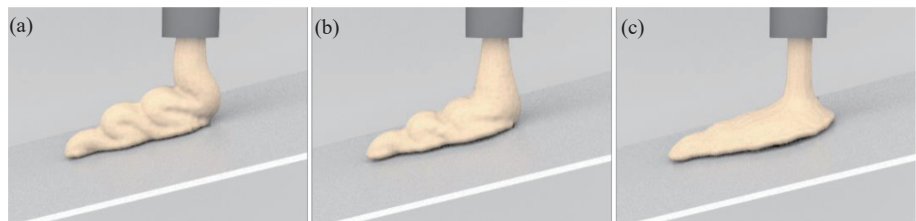


图6 高黏非牛顿流体卷曲折叠效果(非牛顿特性)。(a) $S_3=1.05$; (b) $S_3=1.20$; (c) $S_3=1.40$

Fig.6 Buckling effect of high-viscosity non-Newtonian fluid (non-Newtonian characteristics): (a) $S_3=1.05$; (b) $S_3=1.20$; (c) $S_3=1.40$

程中, 流体发生卷曲并在斜坡上形成多段清晰折痕。黏度模型的参数设置为 $S_1 = 0.2$, $S_2 = 0.1$, 通过设定 S_3 为 1.05、1.20 及 1.40, 以模拟呈现高黏度流体在不同程度的非牛顿特性下的变稀效果。图6展示了第220帧的实验结果, 从左至右, 流体的非牛顿特性不断加强, 变稀效果导致流体流动性逐渐增强, 折叠和压痕逐渐模糊消失, 验证了模型的有效性。

接着, 进行了高黏度流体折痕保持实验(图7), 通过延长实验过程时间进行验证。在这一过程中,

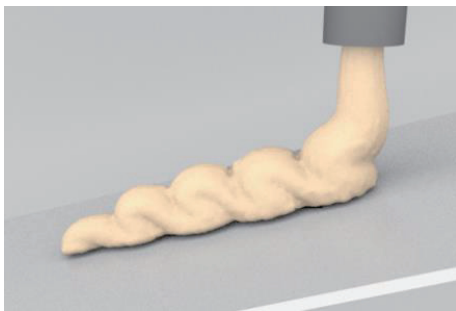


图7 高黏非牛顿流体卷曲折叠效果(折痕保持)

Fig.7 Buckling effect of high-viscosity non-Newtonian fluid (crease retention effect)

斜坡以恒定且缓慢的速度向左侧移动。此实验中黏度计算所使用的参数为 $S_1 = 0.15$, $S_2 = 0.1$, $S_3 = 1.05$ 。图7显示了第280帧的实验结果, Walburn-Schneck模型在模拟高黏度流体时展现出显著的优势, 可以较好地捕捉和保持由流体卷曲折叠所产生的复杂折痕效果。这些折痕可以直观反映流体内部应力分布, 验证了 Walburn-Schneck模型在高黏度特征的流体场景下的准确性和适用性。

3.3 多组分非牛顿流体模拟

在单组分非牛顿流体实验的基础上, 通过观察不同浓度的高黏度流体从管道出口流出的流动轨迹和整体黏度效果, 验证多组分非牛顿流体模型的有效性。实验设置的流体包括均匀混合的水和高黏度流体两种组分, 并利用体积分数来控制各组分的含量。如图8所示, 蓝色表示水的体积分数, 橙色表示高黏度流体的体积分数, 两者的密度分别为 $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 和 $1400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 黏度分别为 $0.01 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 与 $10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。

图9从左至右展示了多组分下不同体积分数的非牛顿流体模拟。通过颜色加深表示高黏度流体的浓度的增加, 图中分别为50%、75%和100%。实

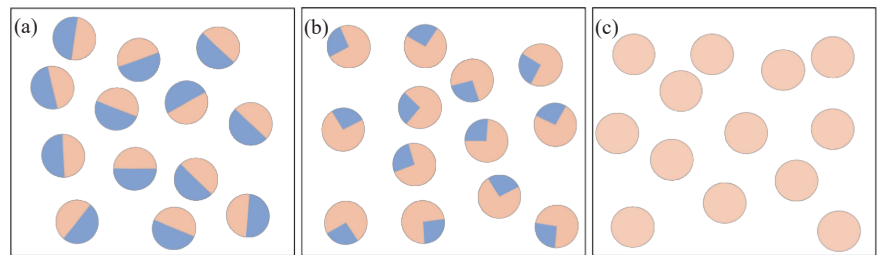


图8 不同高黏度流体体积分数初始化示意图。(a) 50%; (b) 75%; (c) 100%

Fig.8 Diagram for initialization under different high-viscosity fluid volume fraction: (a) 50%; (b) 75%; (c) 100%

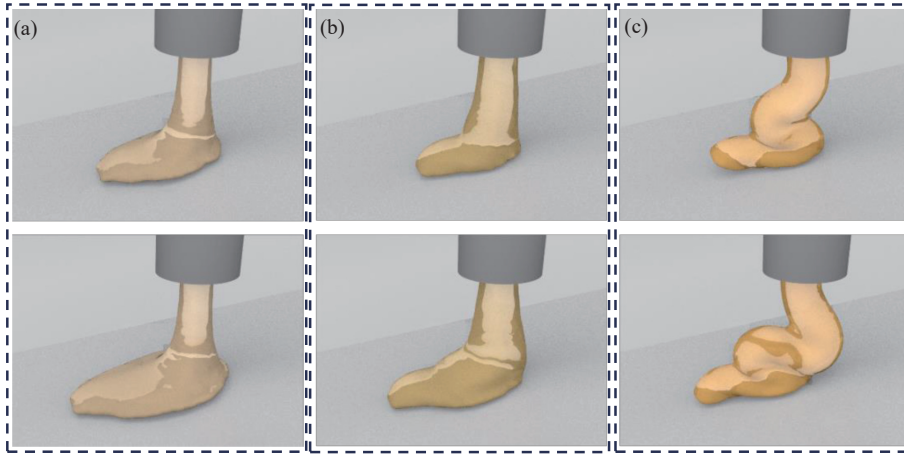


图9 不同体积分数下高黏度流体实验. (a) 50%; (b) 75%; (c) 100%

Fig.9 Experiments on high-viscosity fluids under different volume fractions: (a) 50%; (b) 75%; (c) 100%

验参数设置为 $S_1 = 0.2$, $S_2 = 0.1$, $S_3 = 1.1$, $C_m = 0.2$, $D_m = 0.8$. 第一排为第 150 帧的结果, 第二排为第 200 帧的结果. 实验结果显示, 随着浓度的增加, 流体的黏度逐渐增加, 接触底板后出现卷曲压痕.

通过三相流体的溃坝实验, 进一步验证多组分非牛顿流体模型的稳定性. 图 10 所示的三相流体的溃坝实验结果, 从左到右的蓝、绿、红三种流体黏度依次升高 ($\kappa_{\text{blue}} = 0.01$, $\kappa_{\text{green}} = 0.1$, $\kappa_{\text{red}} = 1$), 实验参数设置为 $S_1 = 0.2$, $S_2 = 0.1$, $S_3 = 1.1$, $C_m = 0.5$, $D_m = 0.4$. 三种流体在模拟开始时因重力作用而下落, 流体块在与地面接触后由于剪应率提高, 黏度不同程度减小, 表现出不同的剪切变稀效果. 由于扩散效应, 在不同种类流体的接触边界表现出混溶的效果, 引起绿色流体两侧黏度不对等, 出现扭曲倾斜, 蓝色流体沿箭头方向延伸

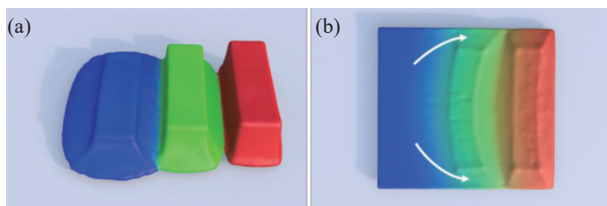


图 10 三相溃坝实验. (a) 第 20 帧; (b) 第 200 帧

Fig.10 Three phase dam break: (a) 20th frame; (b) 200th frame

至两侧的现象.

3.4 多类型血管场景下血液流动特性模拟

为了验证血管壁处固-液作用力模型及多组分非牛顿流体模型在血液流动场景下的有效性, 本节对直线型、分支型和狭窄复杂型血管内血液流动进行了模拟实验. 血液被视为一种剪切变稀的非牛顿流体, 在血管中与水共同构成了多组成非牛顿流体, 其中设定血液中其他物质体积分数为 0.2、水体积分数为 0.8. 血液黏度在 $4 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 浮动, 符合人体血液黏度正常范围 ($3.39 \sim 5.30 \text{ mPa}\cdot\text{s}$).

图 11 为血液流经一直线型血管的实验结果, 具体实验参数设置如表 1 所示, 其中 δ 、 a 、 b 为前期研究的双机制表面张力模型参数^[25], 分别表示标准光滑核、缩小尺度光滑核的影响权重和流体表面张力系数. 在直线型血管内, 血液流动通常呈现出层流状态, 即流体在管道内分层流动, 各层之间互不干扰, 且在壁面作用力下流速从管道中心向管壁逐渐减小, 由此可验证壁面作用力模型的有效性. 同时, 在图 12 所示的粒子态实验图中, 分别为考虑壁面作用力 (图 12(a)) 和未考虑壁面作用力 (图 12(b)) 的结果, 可以观察到图 12(a) 中边界处呈现更加光滑的效果.

进一步探究分支血管结构的模型效果, 按照

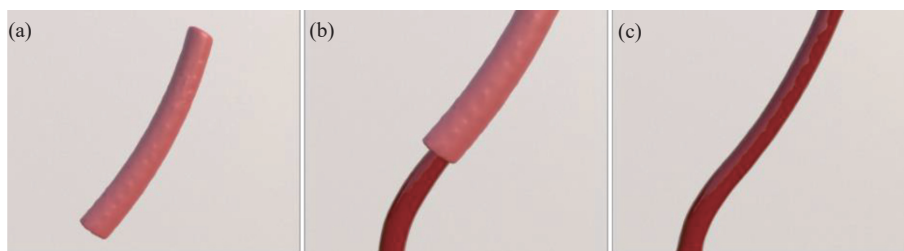


图 11 直线型血管内血液流动结果. (a) 建模结构; (b) 血流结果; (c) 截面内部

Fig.11 Blood flow in a straight vessel: (a) modeled structure; (b) simulation results; (c) inside of the cross-section

表 1 多类型血管场景下血液流动特性模拟实验参数

Table 1 Experimental parameters for simulating blood flow characteristics across various vascular scenarios

Scenario	δ	a	b	α_{blood}	α_{water}	C_m	κ_{blood}	κ_{water}	S_1	S_2	S_3	D_m
Straight	50	20	10	0.2	0.8	0.1	0.1	0.01	0.2	0.1	1.1	0.3
Bifurcated	35	20	20	0.2	0.8	0.1	0.1	0.01	0.2	0.1	1.1	0.3
Complex stenotic	10	40	40	0.2	0.8	0	0.1	0.01	0.1	0.1	1.2	0.2

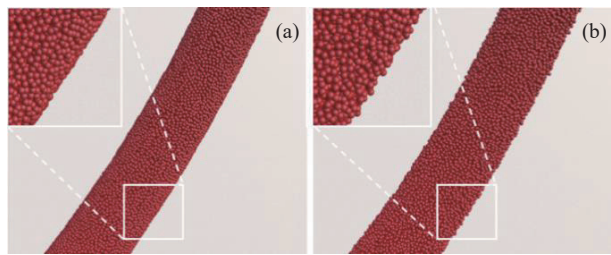


图 12 壁面作用力效果对比. (a) 考虑壁面作用力; (b) 未考虑壁面作用力

Fig.12 Comparison of wall shear stress effects: (a) considering wall shear stress; (b) not considering wall shear stress

表 1 设置实验参数. 图 13 为血液经过血管分支处, 被分流进入下方两条血管内的场景. 实验结果显示, 当血流通过血管分岔位置时, 无粒子穿透, 展现出稳定的流-固耦合效果.

最后, 讨论血管结构延伸至更复杂形态的情况, 考虑主流与支流的存在以及血管直径的差异等因素, 具体实验参数设置如表 1 所示. 如图 14 所示, 血液从一条较宽的主流血管分流进入四条更为狭窄的支流血管, 并最终从下方的出口流出. 图 14(a) 可以观察到实验所采用的血管完整结构以及血液的流动情况, 图 14(b) 为血管截面图, 展示血管内部的血液在血管壁内完全充填.

对图 14 中血管内复杂结构区域进行放大(图 15), 可以清晰地观察到, 当具有一定黏度的血流经过壁面时, 受到壁面作用力的影响, 血液流速下降, 形成了一个附着于血管壁的薄层, 与实际规律相符; 当血流经过血管分叉处时, 并未出现粒子穿透血管壁的现象, 血流与血管壁之间耦合紧密, 不存

在空隙, 在血管内的血液流动状态稳定, 验证了所提出的两种壁面作用力模型的有效性. 综上, 实验结果表明血管壁处固-液作用力模型及多组分非牛顿流体模型能够真实有效模拟血管内血液流动情况.

4 结论与展望

本研究为响应心血管疾病精准诊疗对血流特性模拟的高要求, 提出了一种基于多组分非牛顿流体模型的血流特性模拟方法, 旨在为临床介入治疗方案的个性化设计提供可靠的模拟工具. 首先引入 Walburn-Schneck 黏度模型, 基于幂律函数与最大 R^2 改进回归分析, 精准描述了非牛顿流体流变特性. 其次, 拓展该模型至多组分混合的场景, 利用体积分数描述各组分比例, 准确模拟了多组分非牛顿流体表观黏度. 同时, 构建融合壁面剪应力与黏附力的血管边界处固-液作用力模型, 修正核函数截断效应对流固边界附近流体模拟的计算误差. 经多组对比实验验证, 该方法能有效捕捉非牛顿流体剪切变稀特性、模拟高黏非牛顿流体卷曲折叠现象及多组分流体混合扩散过程, 并在直线型、分支型及狭窄复杂型血管场景中真实还原血液流动状态, 具有高度适应性. 此方法为血流动力学模拟提供了新思路, 但其在微米级细胞相互作用、血栓溶解沉积等病理机制模拟方面尚不深入, 未来将结合生物临床实验数据完善模型, 探索与医学影像技术的融合路径, 从而为心血管疾病数智化诊疗提供有效支持.

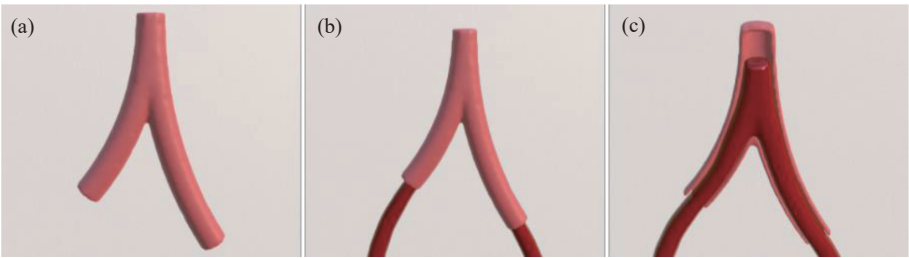


图 13 分支型血管内血液流动结果. (a) 建模结构; (b) 仿真结果; (c) 截面内部

Fig.13 Blood flow in a bifurcated vessel: (a) modeled structure; (b) simulation results; (c) inside of the cross-section

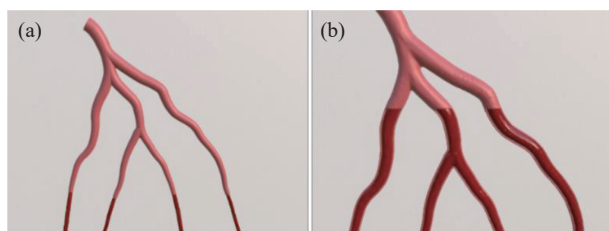


图 14 狭窄复杂型血管内血液流动结果。(a) 建模结构; (b) 截面局部

Fig.14 Blood flow in complex stenotic vessel: (a) modeled structure; (b) localized cross-section of blood vessels

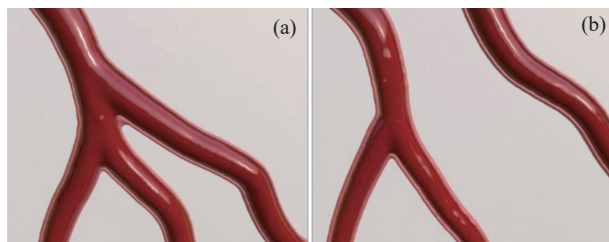


图 15 狭窄复杂型血管截面。(a) 血管壁与血流耦合情况; (b) 局部放大细节

Fig.15 Cross-section of a complex stenotic vessel: (a) coupling between the vessel wall and blood flow; (b) zoomed-in detail

参 考 文 献

- [1] Li N, He J A, Chen Y, et al. A survey on the progress of computer-assisted vascular intervention. *J Comput Aided Des Comput Graphics*, 2022, 34(7): 985
(李娜, 贺建安, 陈阳, 等. 计算机辅助血管介入技术进展综述. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2022, 34(7): 985)
- [2] Xu K W, Wang Z L. Research progress of computational fluid dynamics in intracranial atherosclerotic stenosis. *Chin Res Hosp*, 2025, 12(2): 63
(徐科伟, 王子亮. 计算流体力学在颅内动脉粥样硬化性狭窄中的研究进展. *中国研究型医院(中英文)*, 2025, 12(2): 63)
- [3] Ban X J. Intelligent medical in the context of healthy China initiative. *Chin J Eng*, 2021, 43(9): 1137
(班晓娟. “健康中国”行动下的智慧医疗. *工程科学学报*, 2021, 43(9): 1137)
- [4] Jin T, Wang Z, Li Z D. Medical liver computed tomography image segmentation algorithm based on multi-scale attention U-Net. *J Harbin Eng Univ*, 2025, 46(3): 529
(金涛, 王震, 李昭蒂. 基于多尺度注意力 U-Net 的医学肝脏计算机断层扫描图片分割算法. *哈尔滨工程大学学报*, 2025, 46(3): 529)
- [5] Sarwer M H, Saha T R, Abir S I, et al. EEG functional connectivity and deep learning for automated diagnosis of Alzheimer's disease and schizophrenia. *J Comput Sci Technol Stud*, 2025, 7(1): 82
- [6] Zhang T H, Fan S L, Guo X X, et al. Intelligent medical assistant diagnosis method based on data fusion. *Chin J Eng*, 2021, 43(9): 1197
(张桃红, 范素丽, 郭徐徐, 等. 基于数据融合的智能医疗辅助诊断方法. *工程科学学报*, 2021, 43(9): 1197)
- [7] Peter R, Moreira S, Tagliabue E, et al. Stereo reconstruction from microscopic images for computer-assisted ophthalmic surgery. *Int J Comput Assist Radiol Surg*, 2025, 20(3): 605
- [8] Xu Y R, Ban X J, Wang X K, et al. Simulations of silicone oil filling for use in retinal detachment surgery. *Chin J Eng*, 2021, 43(9): 1233
(徐衍睿, 班晓娟, 王笑琨, 等. 面向视网膜脱离手术的硅油填充模拟. *工程科学学报*, 2021, 43(9): 1233)
- [9] Li G S. *Blood Flow Simulation Based on Smoothed Dissipative Particle Dynamics* [Dissertation]. Changchun: Jilin University, 2021
(李官生. 基于光滑耗散粒子动力学的血流模拟[学位论文]. 长春: 吉林大学, 2021)
- [10] Whitton M C. *Seminal Graphics Papers: Pushing the Boundaries. Volume 2*. New York: Association for Computing Machinery, 2023
- [11] Huang L, Xiao S J, Gu L X, et al. Blood flow simulation in virtual surgery training system. *Comput Appl Software*, 2011, 28(1): 65
(黄雷, 肖双九, 顾力栩, 等. 虚拟手术训练系统的血流模拟. *计算机应用与软件*, 2011, 28(1): 65)
- [12] Zhou Q H. *Design and Implementation of Surface Mesh Construction Algorithm and Hemodynamics Model* [Dissertation]. Shenyang: Northeastern University, 2013
(周庆华. 曲面网格构建算法与血流动力学模型设计与实现[学位论文]. 沈阳: 东北大学, 2013)
- [13] Kronborg J, Svelander F, Eriksson-Lidbrink S, et al. Computational analysis of flow structures in turbulent ventricular blood flow associated with mitral valve intervention. *Front Physiol*, 2022, 13: 806534
- [14] Lampropoulos D S, Hadjinicolaou M. Investigating hemodynamics in intracranial aneurysms with irregular morphologies: A multiphase CFD approach. *Mathematics*, 2025, 13(3): 505
- [15] Gu E Z. *Research on The Rendering Method of Blood Flow Scene in Virtual Surgery System and Program Realization* [Dissertation]. Harbin: Harbin University of Science and Technology, 2022
(顾恩祖. 虚拟手术系统中血流场景渲染方法研究与程序实现[学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2022)
- [16] Li Z H, Xu Q Y, Ye X H, et al. DiffFR: Differentiable SPH-based fluid-rigid coupling for rigid body control. *ACM Trans Graphics*, 2023, 42(6): 1
- [17] Probst T, Teschner M. Unified pressure, surface tension and friction for SPH fluids. *ACM Trans Graphics*, 2025, 44(1): 1
- [18] Zhang Y, Long S, Xu Y, et al. Multiphase viscoelastic non-Newtonian fluid simulation. *Comput Graphics Forum*, 2024, 43(8): e15180
- [19] Liu S S, He X W, Wang W C, et al. Survey on fluid simulation using smoothed particle hydrodynamics. *J Software*, 2024, 35(1): 481
(刘树森, 何小伟, 王文成, 等. 光滑粒子流体动力学流体仿真技术综述. *软件学报*, 2024, 35(1): 481)
- [20] Müller M, Schirm S, Teschner M. Interactive blood simulation for virtual surgery based on smoothed particle hydrodynamics.

- Technol Health Care*, 2004, 12(1): 25
- [21] Qin J, Pang W M, Nguyen B P, et al. Particle-based simulation of blood flow and vessel wall interactions in virtual surgery // *Proceedings of the 1st Symposium on Information and Communication Technology*. Hanoi, 2010: 128
- [22] Li Y, Guo Y C, Liao M L, et al. Virtual surgery bleeding simulation based on improved SPH algorithm. *J Nanchang Hangkong Univ (Nat Sci)*, 2023, 37(1): 37
(李言, 郭雅春, 廖明亮, 等. 基于改进 SPH 算法的虚拟手术流血模拟. 南昌航空大学学报(自然科学版), 2023, 37(1): 37)
- [23] McNamara G R, Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice gas automata. *Phys Rev Lett*, 1988, 61(20): 2332
- [24] Gagniere S, Hyde D, Marquez-Razon A, et al. A hybrid Lagrangian/eulerian collocated velocity advection and projection method for fluid simulation. *Comput Graphics Forum*, 2020, 39(8): 1
- [25] Xiong Y G, Wang X K, Xu Y R, et al. Dual-mechanism surface tension model for SPH-based simulation. *Visual Comput*, 2024, 40(7): 4765
- [26] Walburn F J, Schneck D J. A constitutive equation for whole human blood. *Biorheology*, 1976, 13(3): 201
- [27] Ren B, Li C F, Yan X, et al. Multiple-fluid SPH simulation using a mixture model. *ACM Trans Graphics*, 2014, 33(5): 1
- [28] Manninen M, Taivassalo V, Kallio S. *On the Mixture Model for Multiphase Flow*. Espoo: VTT Technical Research Centre of Finland, 1996
- [29] Jiang Y, Li C, Deng S, et al. A divergence-free mixture model for multiphase fluids. *Comput Graphics Forum*, 2020, 39(8): 69
- [30] Bingham E C, Brown D F. The mixture law. *J Rheol*, 1932, 3(1): 95
- [31] Soulis J V, Giannoglou G D, Chatzizisis Y S, et al. Non-Newtonian models for molecular viscosity and wall shear stress in a 3D reconstructed human left coronary artery. *Med Eng Phys*, 2008, 30(1): 9